

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ДГТУ

кафедра «Безопасность жизнедеятельности
и защита окружающей среды»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

**«Математическое моделирование процессов
в окружающей среде»**

Ростов-на-Дону 2023

Составители: ст. преподаватель Лазуренко Р.Р.

Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников по дисциплине «Математическое моделирование процессов в окружающей среде» – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ. 2023. – 32 с.

Дисциплина изучается студентами **заочного** отделения направления 200301 – Техносферная безопасность.

Печатается по решению методической комиссии факультета «Безопасность жизнедеятельности и инженерная экология».

| | |
|-----------|---------------------------|
| Рецензент | к.т.н., доцент Мороз К.А. |
|-----------|---------------------------|

| | |
|------------------|---------------------------------|
| Научный редактор | д.т.н., профессор Андреева Е.С. |
|------------------|---------------------------------|

© Издательский центр ДГТУ, 2023

ЦЕЛЬ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Обучение будущих инженеров-экологов применению методов математического моделирования в вопросах экологии и защиты окружающей природной среды.

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫБОРА ТЕМ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

- 1) Математические модели в окружающей среде при нормальном состоянии экосистем.
- 2) Моделирование процессов обработки экологической информации в географических информационных системах.
- 3) Моделирование обработки экологической данных с точки зрения машинного обучения (классификация, кластеризация, нейронные сети, клеточные автоматы и пр.).
- 4) Применение численных методов в моделях экологии с точки зрения реализации с помощью математического и инструментального программного обеспечения.
- 5) Применение конкретных моделей процессов и аппаратов очистки состояния окружающей среды.

Выбор темы происходит по согласованию с преподавателем. Направление для выбора тем выбирается студентом лично.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ (теоретическая часть)

1. Понятие моделирования и его основные этапы.
2. Характеристика программного обеспечения для компьютерного математического моделирования.
3. Характеристика задачи о первообразной.
4. Характеристика задачи о движении как простейшей математической модели.
5. Задача о касательной и её геометрический смысл для обыкновенного дифференциала.
6. Определение обыкновенного дифференциального уравнения и общая его запись.
7. Геометрический смысл ОДУ 1-го порядка. Поле линейных элементов.
8. Понятие общего интеграла дифференциального уравнения.
9. Задача Коши для ОДУ 1-го порядка.

10. Задача Коши для ОДУ 2-го порядка.
11. Общая запись линейного дифференциального уравнения n -го порядка.
12. Понятие однородного и неоднородного уравнения первого порядка.
13. Задача Коши для линейного ОДУ n -го порядка.
14. Понятие линейно зависимых и линейно независимых систем функций.
15. Определитель Вронского для проверки линейно зависимости системы функций.
16. Полярные координаты.
17. Сферические координаты.
18. Цилиндрические координаты.
19. Косоугольные координаты.
20. Параболические координаты.
21. Канонические координаты.
22. Дифференциальная модель изолированной популяции с непрерывным размножением.
23. Уравнение экспоненциального роста изолированной популяции. Характеристический график и вывод уравнения скорости.
24. Уравнение гиперболического роста изолированной популяции. Характеристический график и вывод уравнения скорости.
25. Модель лавинообразного роста с акселерацией видового потенциала. Характеристический график и вывод уравнения скорости.
26. Логистическое уравнение Ферхюльста (ограниченный рост). Характеристический график и вывод уравнения скорости.
27. Межвидовая конкуренция. Уравнение Лотки-Вольтеры с учётом коэффициента конкуренции. Характеристический график и вывод уравнения скорости.
28. Модель популяции с начальной критической плотностью. Характеристический график и вывод уравнения скорости.
29. Полная модель изолированной двуполой популяции. Параметрический портрет.
30. Межвидовая конкуренция. Уравнение Лотки-Вольтеры с учётом коэффициента конкуренции.
31. Общее моделирование межвидовых отношений. Компоненты системы и их характеристика. Общий вид системы дифференциальных уравнений.
32. Понятие графического портрета. Изоклины. Векторного поля.
33. Структура окна Command Windows в MATLAB.
34. MATLAB в роли суперкалькулятора.
35. Основные объекты MATLAB.
36. Типы переменных, используемых в MATLAB.
37. Операции с комплексными числами в MATLAB.
38. Операции с матрицами в MATLAB.
39. Вычисление элементарных функции для векторов и матриц в MATLAB.
40. Основные арифметические операторы и их синтаксис в системе MATLAB.

ПРИМЕРЫ РАСЧЁТОВ.

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И МАТРИЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

ЗАДАНИЕ:

1. Для матрицы A из таблицы №1 приложения вычислить определитель, обратную матрицу, решить систему алгебраических уравнений методом Крамера и с помощью обратной матрицы.
2. Для полинома, коэффициенты которого заданы в таблице №2 приложения, найти вектор значений его в точках, заданных вектором аргумента, построить график изменения значений полинома. Найти все корни полинома.
3. Решить дифференциальное уравнение второго порядка, построить график переходного процесса и фазовый портрет.
4. Решить систему дифференциальных уравнений первого порядка
5. Вычислить определенный интеграл с использованием любого метода, реализованного в **MatLab**. Задание взять из таблицы № 5.
6. Решить дифференциальное уравнение в частных производных (параболическое) с использованием солвера построить график. Задание взять из таблицы № 6.
7. Задание взять из таблицы № 7.

Задание 1. (таблица №1)

```
clc;
A=[2,4,6,1;3,76,12,45;-2,5,-67,12;3,4,6,9];
disp(A);
b=[4 7 12 89]';
disp(b);
d=det(A);
if d==0
    disp('опредетитель матрицы а равен нулю');
    break;
end
%Решение системы алгебраических уравнений методом Крамера
A1=[b,A(:,2),A(:,3),A(:,4)];
A2=[A(:,1),b,A(:,3),A(:,4)];
A3=[A(:,1),A(:,2),b,A(:,4)];
A4=[A(:,1),A(:,2),A(:,3),b];
x(1)=det(A1)/d;
x(2)=det(A2)/d;
x(3)=det(A3)/d;
x(4)=det(A4)/d;
x_k=x';%Вектор решения, методом Крамера
Ao=inv(A);%Обратная матрица
x_o=Ao*b;%Вектор решения, полученный с обратной матрицей
x_r=A\b;%Вектор решения, полученный делением матриц
disp('Результаты решения системы уравнений');
```

```
disp('      x_k      x_o      x_r');
fprintf('| %5.2f | %5.2f | %5.2f |\n'...
        ,x_k,x_o,x_r);
```

Результаты решения системы уравнений

```
      x_k      x_o      x_r
| 6.56 | -6.12 | 0.92 |
| 9.80 | 6.56 | -6.12 |
| 0.92 | 9.80 | 6.56 |
| -6.12 | 0.92 | 9.80 |
```

Задание 2. (таблица №2)

Одним из математических объектов, поддерживаемых в **MatLab**, является полином. Он представляется в системе вектором своих коэффициентов, начиная с коэффициента при старшей степени:

```
>>p=[2 4 -3 1];
```

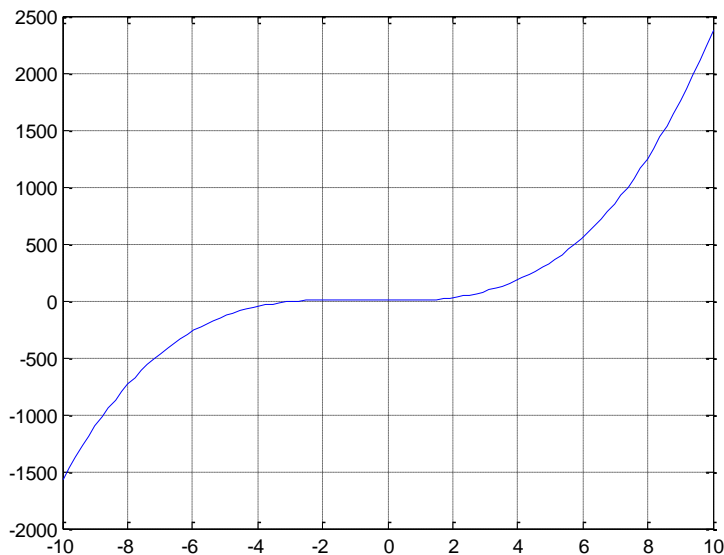
Это запись полинома $2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$. Для полиномов реализовано большое количество функций, некоторые из которых приведены ниже:

| | |
|---------|---|
| polyval | значение полинома в точке |
| poly | восстановление полинома по корням |
| roots | корни полинома |
| conv | свёртка (умножение) полиномов |
| deconv | деление полиномов |
| polyder | производная полинома |
| residue | разложение отношения полиномов в сумму простых дробей |

```
%задание 2
clc;%
p=[2 4 -3 1];%коэффициенты полинома
q=roots(p);%определение корней полинома
disp('корни полинома');
disp(q);
x=linspace(-10,10);%вектор значений аргумента
y=polyval(p,x);%значения полинома в точках вектора x
plot(x,y,'-')%график
grid on
```

корни полинома

```
-2.6399
0.3200 + 0.2950i
0.3200 - 0.2950i
```



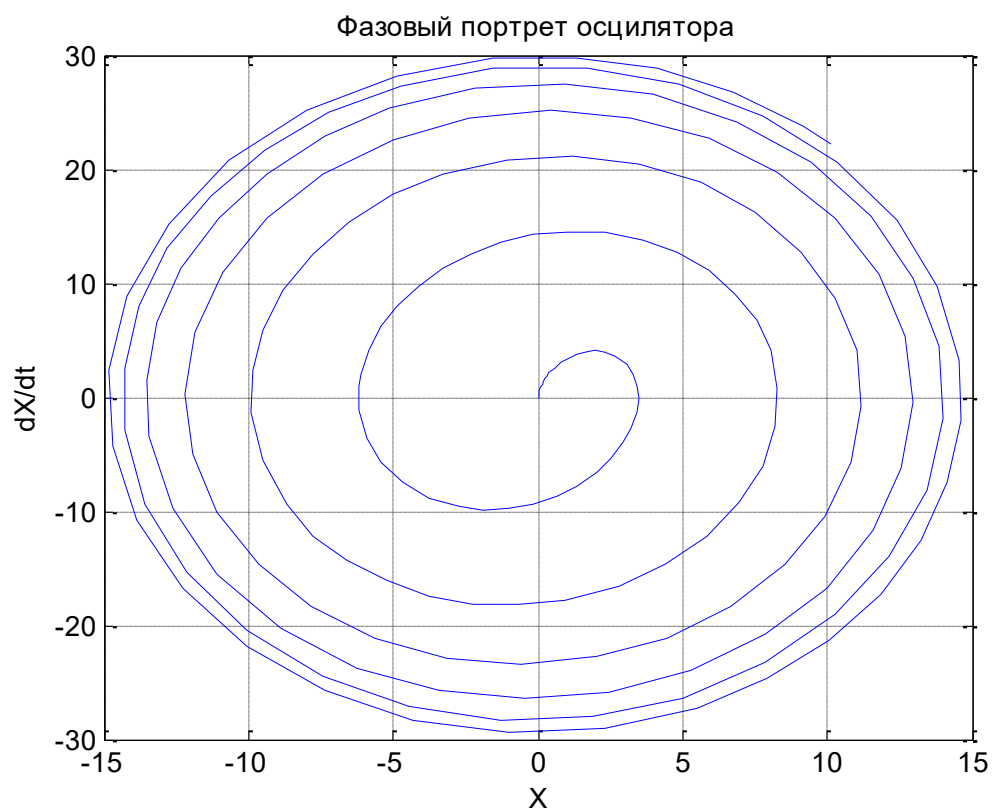
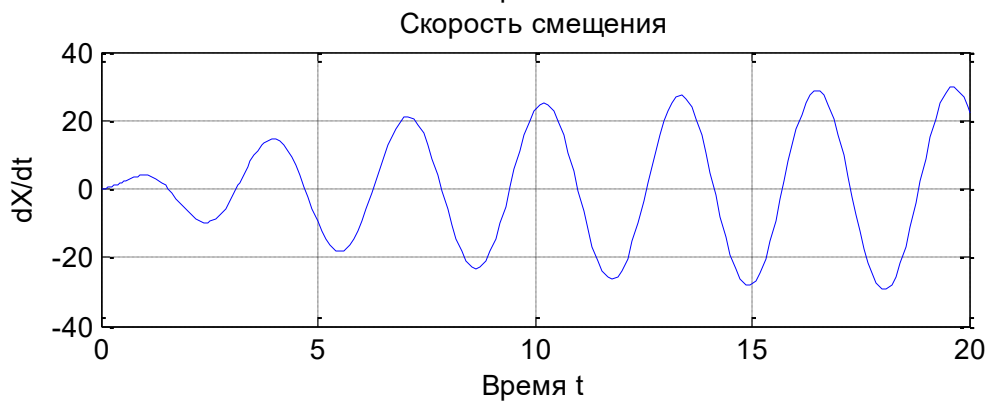
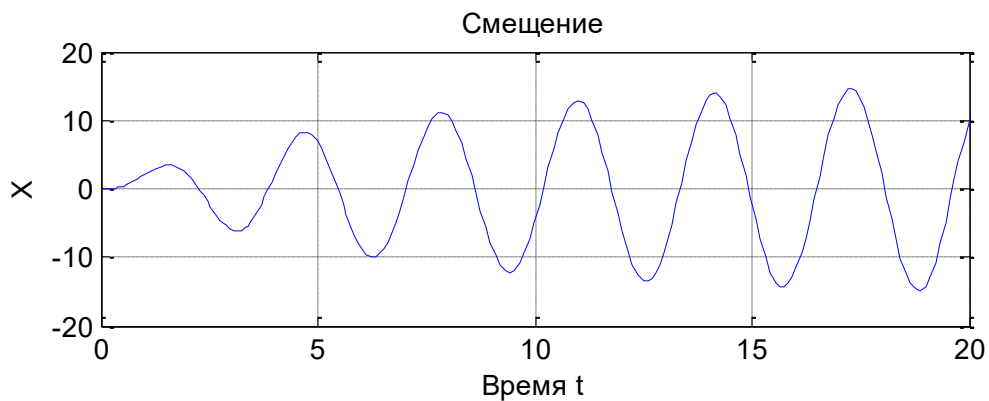
Задание 3. (таблица №3)

```
function primer3
clc;%
clear all;%
%
m=5;
h=0.8;
c=20;
F=10;
x0=[0; 0];%Начальные условия
Stime=[0 20];%Интервал интегрирования
%-----Задание управляющей структуры-----
options=odeset('RelTol',1e-4);
%-----Вызов солвера-----
[t,x]=ode15s(@oscil, Stime, x0, options,F,c,h,m);
%-----Вывод графиков-----
figure(1)
subplot (2,1,1); plot(t,x(:,1));
grid on
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
title('Смещение')
    xlabel('Время t')
    ylabel('X')
subplot (2,1,2); plot(t,x(:,2));
grid on
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
title('Скорость смещения')
    xlabel('Время t')
    ylabel('dx/dt')
figure(2)
plot(x(:,1),x(:,2));
grid on
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',10);
title('Фазовый портрет осциллятора')
    xlabel('X')
    ylabel('dx/dt')
```

```

function dx=oscil(t,x,F,c,h,m)
%
dx=zeros(2,1);
wp=2;%
dx(1)=x(2);%
dx(2)=-2*h/m*x(2)-c/m*x(1)+F*sin(wp*t);%
%

```



Задание 4. (таблица №1)

```
>> A=[-2,-4,3,1;-1,-5,-7,-3;-10,-2,-4,4;-1,1,-1,-1];
>> q=eig(A)% Спектр матрицы A
q =
-10.1531
-0.2791 + 7.0321i
-0.2791 - 7.0321i
-1.2886
>> Ind_gest=max(real(abs(q)))/min(real(abs(q)))
Ind_gest =
```

а. Показатель жесткости системы дифференциальных уравнений

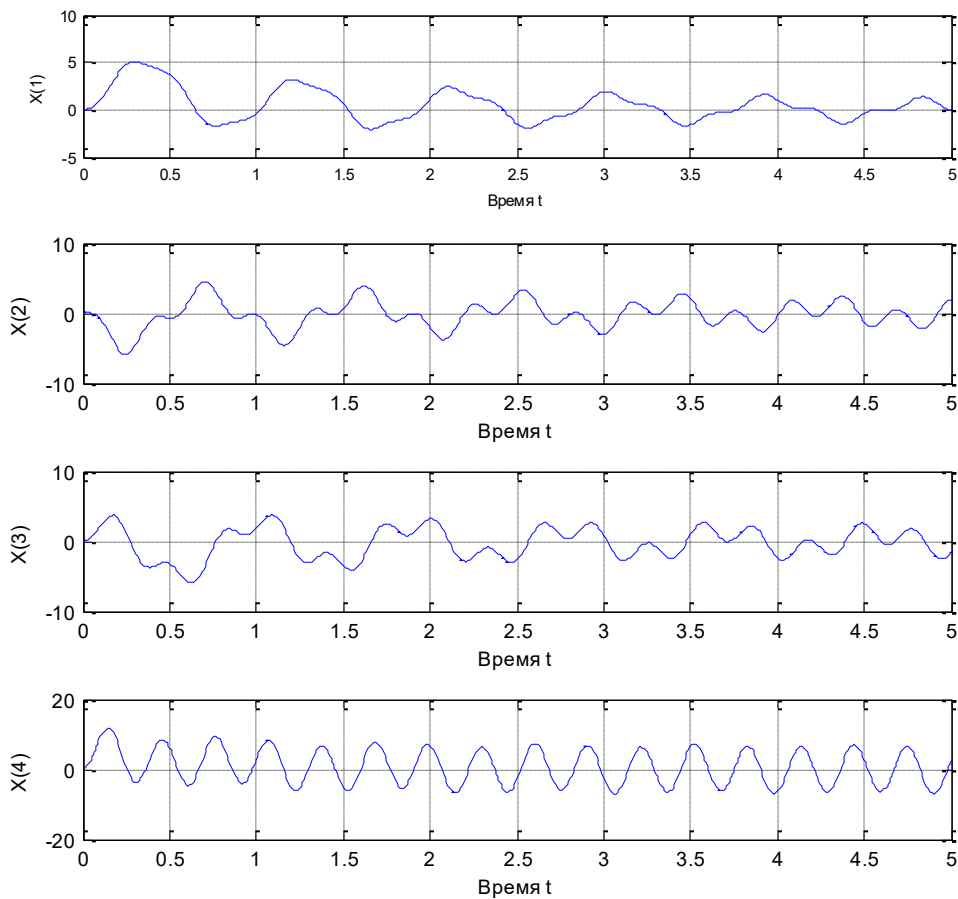
Как видно из полученных результатов спектр собственной матрицы системы дифференциальных уравнений лежит в левой части комплексной плоскости, а значит, система дифференциальных уравнений может быть решена численными методами. По значению показателя жесткости можно сделать вывод, что исследуемая система жесткой не является и можно использовать «солверы» ode 45 и ode 23.

```
function primer4
%primer4
clc;
clear all;
global A b
%Описание объекта дано в виде: dX/dt=A*X+b*u
%Собственный оператор объекта
A=[-2,-4,3,1;-1,-5,-7,-3;-10,-2,-4,4;-1,1,-1,-1];
%Матрица внешних воздействий
b=[4 7 12 89]';
%-----Формирование условий обращения к солверу-----
x0=[0; 0; 0; 0];%Начальные условия
Stime=[0 5];%Интервал интегрирования
%-----Задание управляющей структуры-----
options=odeset('RelTol',1e-4);
%-----Вызов солвера-----
[t,x]=ode45(@SistODE,Stime,x0,options);
ppr(t,x);%
%-----Формирование системы дифференциальных уравнений
function dx=SistODE(t,x)
global A b
w=20.5;
Am=1.5;
u=Am*sin(w*t);
dx=zeros(4,1);
dx=A*x+b*u;
%-----Вывод графиков-----
function ppr(t,x)
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',8);
subplot(4,1,1); plot(t,x(:,1));
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',6);
grid on
xlabel('Время t')
```

```

        ylabel('X(1)')
subplot (4,1,2); plot(t,x(:,2));
set(gca, 'FontName', 'Arial Cyr', 'FontSize', 8);
grid on
        xlabel('Время t')
        ylabel('X(2)')
subplot (4,1,3); plot(t,x(:,3));
set(gca, 'FontName', 'Arial Cyr', 'FontSize', 8);
grid on
        xlabel('Время t')
        ylabel('X(3)')
subplot (4,1,4); plot(t,x(:,4));
set(gca, 'FontName', 'Arial Cyr', 'FontSize', 8);
grid on
        xlabel('Время t')
        ylabel('X(4)')

```



Задание 5 (таблица №4)

```

function primer5
%primer5
clc;
clear all;
format long; %"Длиная запись"
Tol=0.0025; %Точность расчета
a=5; %Нижний предел интегрирования
b=15; %Верхний предел интегрирования

```

```

h=0.001;%Шаг интегрирования для метода трапеций
x=a:h:b;%Вектор значений аргумента
Y=Fun(x);%Обращение к подынтегральной функции
Rez_trap=trapz(x,Y);%Результат расчета по методу трапеций
%Вычисление интеграла по методу Симпсона
% с заданной точностью
Rez_Sim=quad(@Fun,a,b,Tol);%Результат расчета по методу Симпсона

disp('Сравнение результатов интегрирования методом');
disp('      трапеций      Симпсона ');
fprintf('| %10.8f | %10.8f |\n',Rez_trap,Rez_Sim);

function z=Fun(x)
%Подынтегральная функция
%z=(1.6*x-2.7)./(1.5*x.^3+3.9);
z=sqrt(2*x-1);

Сравнение результатов интегрирования методом
      трапеций      Симпсона
| 43.05659312 | 43.05659035 |

```

Задание 6 (таблица №5)

Решить параболическое уравнение в частных производных (PDE) с использованием встроенного «солвера» в системе **MatLab**. Уравнения в частных производных имеют вид:

$$c\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \cdot f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \right) + s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Рассмотрим пример:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + s$$

Граничные условия: $u(0,t)=0 \quad \pi \cdot t + \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$

Начальные условия: $u(x,0)=\cos \pi x$

$s=0.$

```

function primer6
clc;
clear all;
global a
m = 0;%коэффициент
a=10;%
x = linspace(0,1,20);%вектор значений координаты
t = linspace(0,2,5);%вектор значений времени
%
%pdepe - солвер для решения параболических уравнений в matlab
sol = pdepe(m,@pdex1pde,@pdex1ic,@pdex1bc,x,t);
u = sol(:,:,1);%матрица результата решения
[nr nc]=size(u);%размер матрицы u
%
figure(1)
surf(x,t,u)
title('Numerical solution computed with 20 mesh points.')

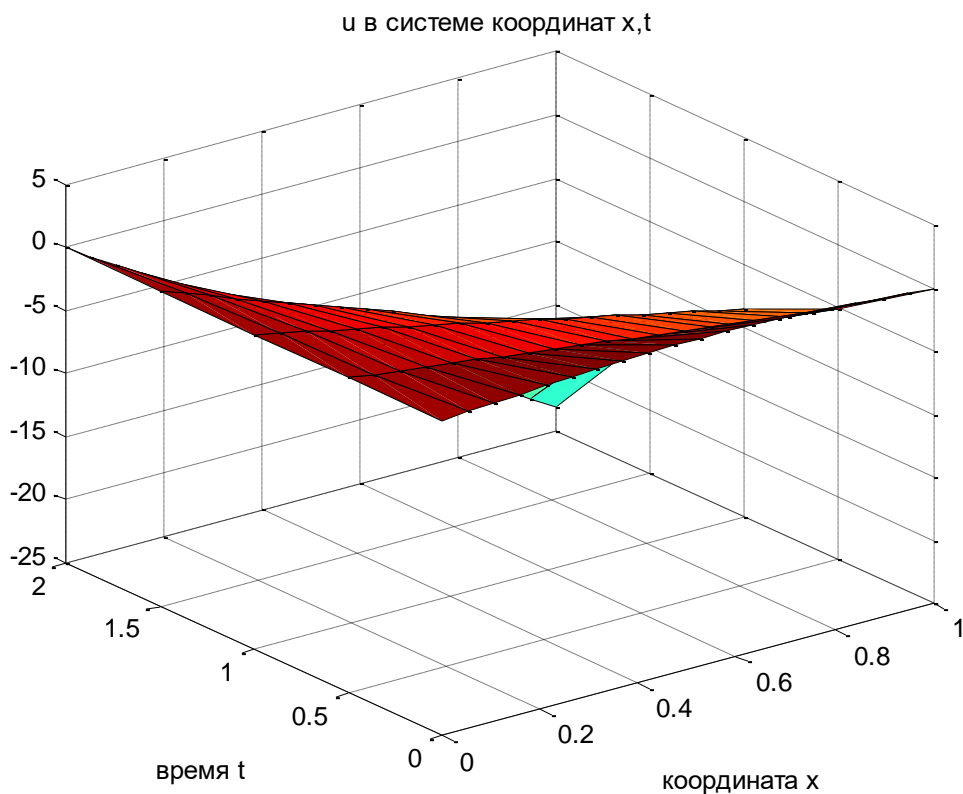
```

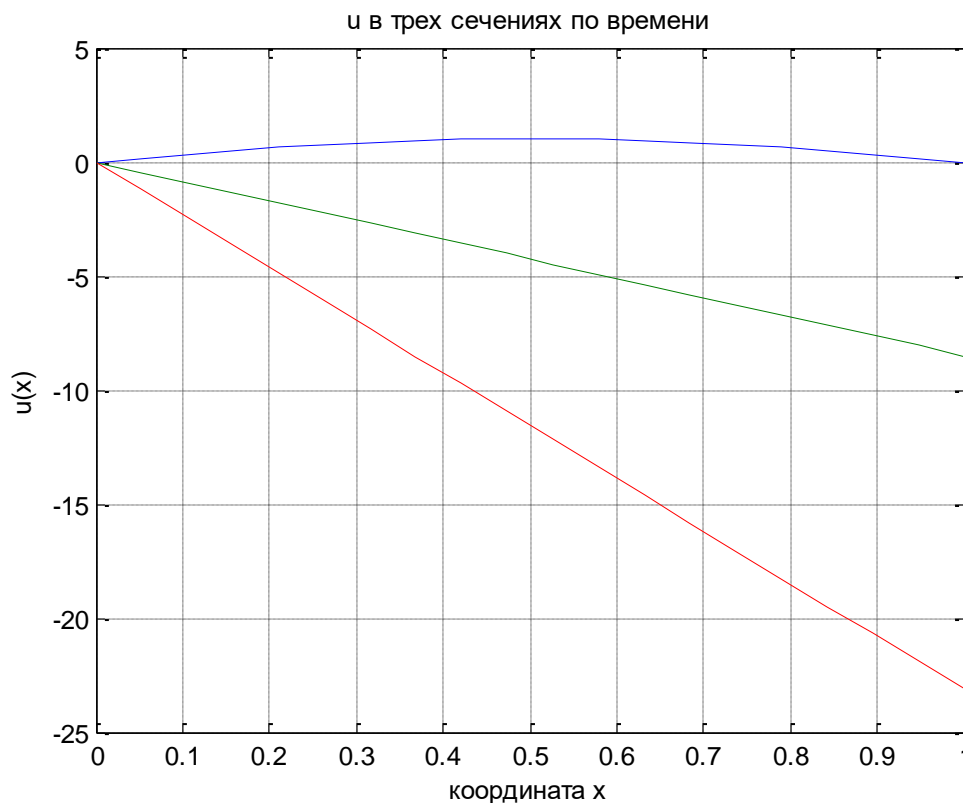
```

xlabel('координата x')
ylabel('время t')
%
figure(2)
plot(x,u(1,:),x,u(3,:),x,u(nr,:));%

title('u в трех сечениях по времени');
xlabel('координата x');
ylabel('u(x) ');
grid on
% -----
function [c,f,s] = pdex1pde(x,t,u,DuDx)
%коэффициенты уравнения
global a
c = 1/a^2;%
f = DuDx;%
s = 0;%
% -----
function u0 = pdex1ic(x)
%начальное условие
u0 = sin(pi*x);
% -----
function [pl,ql,pr,qr] = pdex1bc(xl,ul,xr,ur,t)
%граничное условие
pl = ul;%
ql = 0;%
pr = pi * exp(t);%
qr = 1;%

```





Задание 7. (таблица №6)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ.

В системе мал реализованы функции, предназначенные для анализа и обработки эмпирических данных, заданных в виде числового массива. Также реализованы функции аппроксимации и интерполяции.

Основные операции, необходимые для выполнения контрольного задания:

S=sum(X) – в случае одномерного массива возвращается сумма элементов массива, в случае массива двумерного возвращается вектор-строка, содержащая суммы элементов каждого столбца.

Y=sort(X) - в случае одномерного массива упорядочивает его элементы по возрастанию, для двумерного массива происходит сортировка элементов каждого столбца.

C=max(X) и **C=min(X)** – соответственно определение максимального и минимального элемента в векторе данных.

Me=median(X) вычисление медианы одномерного массива.

M=mean(X) вычисление выборочного среднего одномерного массива.

S=std(X) вычисление стандартного отклонения одномерного массива, соответственно $D=S^2$ – дисперсия данных этого массива.

polyfit(x,y,n) – вычисление коэффициентов аппроксимирующего полинома порядка n по данным в векторах **X** и **Y**.

polyval(a,x) – вычисление значений полинома в точках **X**.

```
function primer7
```

```

%
clc;
clear all;
x=[-8,-7,-6,-5,-3,-1,2,5];%
y=[1.36,1.88,2,1.7,-1.1,-1.02,-2.4,1.16];
size(x)
size(y)
M_x=mean(x);
M_y=mean(y);
Me=median(y);
y_max=max(y);
y_min=min(y);
S=std(y);
D=var(y);
Mo=mode(y);
K=sum((x-M_x).*(y-M_y))./...
    sqrt(sum((x-M_x).^2)*sum((y-M_y).^2));

disp('данные общей статистики выборки y');
disp('      M      S      Mo      Me');
fprintf('| %5.2f | %5.2f | %5.2f | %5.2f |\n',M_y,S,Mo,Me);
disp('    y_max    y_min    K');
fprintf('| %5.2f | %5.2f | %5.2f |\n',y_max,y_min,K);
%
z2=fun(x,y,2);
z3=fun(x,y,3);
z4=fun(x,y,4);
PechGraf(x,y,z2,z3,z4);
%
function z=fun(x,y,n)
%
a=polyfit(x,y,n);%
z=polyval(a,x);%

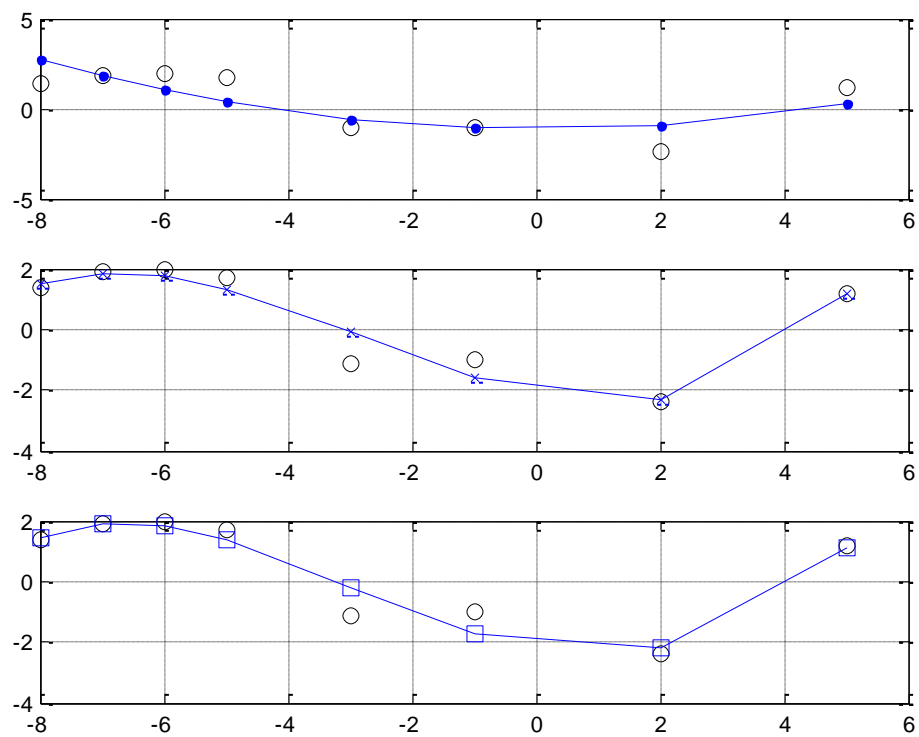
function PechGraf(x,y,z2,z3,z4)
    subplot(3,1,1);
    set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',8);
    plot(x,y,'ok',x,z2,'.-');
    grid on
    subplot(3,1,2);
    set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',8);
    plot(x,y,'ok',x,z3,'x-');
    grid on
    subplot(3,1,3);
    set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',8);
    plot(x,y,'ok',x,z4,'s-');
    grid on

```

данные общей статистики выборки y

| | | | |
|-------|-------|-------|------|
| M | S | Mo | Me |
| 0.45 | 1.69 | -2.40 | 1.26 |
| y_max | y_min | K | |

| 2.00 | -2.40 | -0.53 |



Модель Лотки-Вольтерры

Введение

Модель Лотки-Вольтерры описывает динамику взаимодействия двух популяций: хищников и жертв. Эта модель основана на системе дифференциальных уравнений, которые описывают, как популяции хищников и жертв изменяются со временем.

Уравнения модели

Пусть:

- $x(t)$ — численность популяции жертв (например, кроликов).
- $y(t)$ — численность популяции хищников (например, лисиц).

Модель описывается следующими уравнениями:

1. Уравнение для жертв:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

где:

- (α) — коэффициент размножения жертв.
- (β) — коэффициент, описывающий влияние хищников на жертв.

2. Уравнение для хищников:

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

где:

- (δ) — коэффициент размножения хищников, зависящий от наличия жертв.
- (γ) — коэффициент естественной смертности хищников.

Эквивалентное конкурентное воздействие

Эквивалентное конкурентное воздействие описывает, как взаимодействие между двумя видами может быть эквивалентно конкуренции за ресурсы. В контексте модели Лотки-Вольтерры это означает, что хищники и жертвы влияют друг на друга, и их взаимодействие можно рассматривать как конкуренцию за ресурсы (в данном случае, жертвы для хищников).

Пример

Рассмотрим конкретный числовой пример с параметрами:

- $(\alpha = 0.1)$ – (жертвы размножаются с коэффициентом 10%);
- $(\beta = 0.02)$ – (каждый хищник убивает 2% жертв);

– ($\delta = 0.01$) – (каждый хищник размножается с коэффициентом 1% на каждую жертву);

– ($\gamma = 0.1$) (хищники умирают с коэффициентом 10%).

Начальные условия: - ($x(0) = 40$) (начальная численность жертв). - ($y(0) = 9$) (начальная численность хищников).

Решение системы уравнений

Для решения системы уравнений можно использовать численные методы, такие как метод Эйлера или метод Рунге-Кутты. В данном примере мы будем использовать метод Рунге-Кутты.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Параметры модели
alpha = 0.1 # коэффициент размножения жертв
beta = 0.02 # коэффициент влияния хищников на жертв
delta = 0.01 # коэффициент размножения хищников
gamma = 0.1 # коэффициент смертности хищников

# Начальные условия
x0 = 40 # начальная численность жертв
y0 = 9 # начальная численность хищников

# Временной интервал
t = np.linspace(0, 200, 1000) # от 0 до 200 с 1000 точками

# Функция для вычисления производных
def lotka_volterra(t, z):
    x, y = z
    dxdt = alpha * x - beta * x * y
    dydt = delta * x * y - gamma * y
    return np.array([dxdt, dydt])

# Метод Рунге-Кутты
def runge_kutta(f, z0, t):
    z = np.zeros((len(t), len(z0)))
    z[0] = z0
    for i in range(1, len(t)):
        h = t[i] - t[i - 1]
        k1 = f(t[i - 1], z[i - 1])
        k2 = f(t[i - 1] + h / 2, z[i - 1] + h / 2 * k1)
        k3 = f(t[i - 1] + h / 2, z[i - 1] + h / 2 * k2)
        k4 = f(t[i - 1] + h, z[i - 1] + h * k3)
```

```

        z[i] = z[i - 1] + h / 6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
    return z

```

```

# Решение системы уравнений

```

```

z0 = np.array([x0, y0])
solution = runge_kutta(lotka_volterra, z0, t)

```

```

# Построение графиков

```

```

plt.figure(figsize=(12, 6))

```

```

# График численности жертв

```

```

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(t, solution[:, 0], label='Жертвы (x)', color='blue')
plt.title('Динамика популяции жертв')
plt.xlabel('Время')
plt.ylabel('Численность')
plt.grid()
plt.legend()

```

```

# График численности хищников

```

```

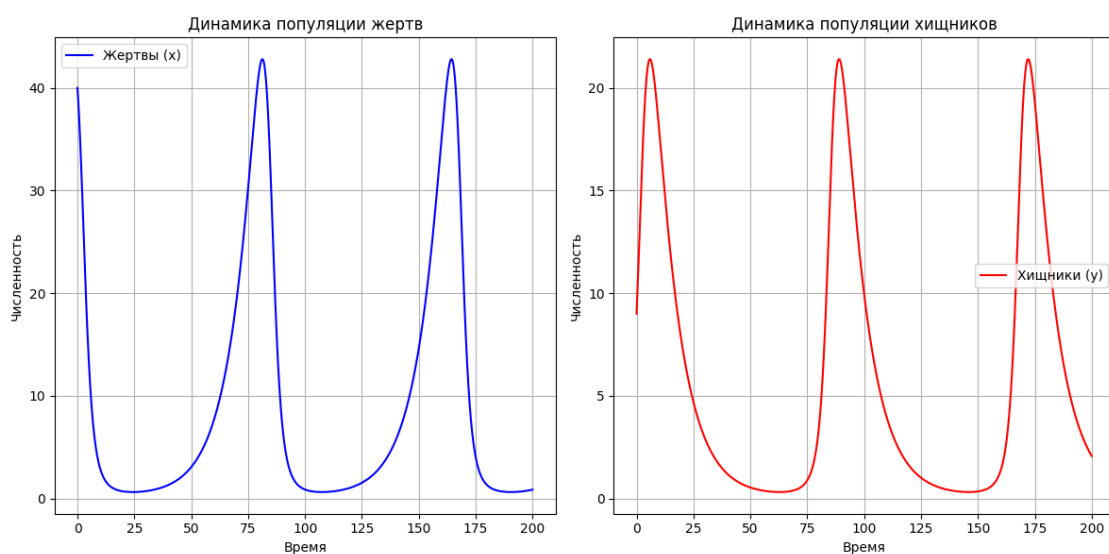
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(t, solution[:, 1], label='Хищники (y)', color='red')
plt.title('Динамика популяции хищников')
plt.xlabel('Время')
plt.ylabel('Численность')
plt.grid()
plt.legend()

```

```

plt.tight_layout()
plt.show()

```



png

Характеристика модели Лотки-Вольтерры

1. Исторический контекст

Модель Лотки-Вольтерры была разработана в начале 20 века независимыми учеными Альфредом Лоткой и Вито Вольтерра. Она была создана для описания динамики популяций в экосистемах, где одни виды (хищники) зависят от других (жертвы) для своего существования. Эта модель стала основой для многих исследований в области экологии, биологии и даже экономики.

2. Биологические виды

В качестве примера можно рассмотреть взаимодействие между популяциями кроликов (жертвы) и лисиц (хищники). Кролики размножаются быстро и служат пищей для лисиц. Лисицы, в свою очередь, зависят от наличия кроликов для своего выживания и размножения.

3. Математическая формулировка

Как уже упоминалось, модель описывается двумя дифференциальными уравнениями:

1. Уравнение для жертв:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

- (αx) — это положительный член, который описывает рост популяции жертв.
- $(-\beta xy)$ — это отрицательный член, который описывает уменьшение популяции жертв из-за хищников.

2. Уравнение для хищников:

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

- (δxy) — это положительный член, который описывает рост популяции хищников, зависящий от наличия жертв.
- $(-\gamma y)$ — это отрицательный член, который описывает естественную смертность хищников.

4. Анализ устойчивости

Для анализа устойчивости системы можно рассмотреть стационарные точки, где обе производные равны нулю:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

Решая эти уравнения, мы можем найти стационарные точки, которые помогут понять, как популяции будут вести себя в долгосрочной перспективе.

5. Стационарные точки

Стационарные точки можно найти, решая систему уравнений: 1. $(\alpha x - \beta xy = 0)$
2. $(\delta xy - \gamma y = 0)$

Из первого уравнения можно выразить (y) :

$$y = \frac{\alpha}{\beta}$$

Подставляя это значение во второе уравнение, получаем:

$$\delta x \cdot \frac{\alpha}{\beta} - \gamma \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 0$$

Отсюда можно выразить (x) :

$$x = \frac{\gamma}{\delta}$$

Таким образом, стационарные точки: 1. $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

6. Линейный анализ

Для анализа устойчивости стационарных точек можно использовать линейный анализ. Для этого необходимо вычислить якобиан системы в стационарной точке и определить его собственные значения. Если все собственные значения имеют отрицательные действительные части, то стационарная точка устойчива.

7. Графическое представление

Графическое представление динамики популяций позволяет визуализировать изменения в численности жертв и хищников со временем. Графики, построенные с помощью кода на Python, показывают, как популяции колеблются, что является характерным для систем, описываемых моделью Лотки-Вольтерры.

8. Применение в экологии

Модель Лотки-Вольтерры имеет множество применений в экологии, включая:
- Изучение динамики популяций в экосистемах.
- Оценка влияния хищников на популяции жертв.
- Прогнозирование изменений в экосистемах под воздействием внешних факторов, таких как изменение климата или вмешательство человека.

9. Ограничения модели

Несмотря на свою полезность, модель Лотки-Вольтерры имеет ограничения: - Она предполагает, что популяции хищников и жертв взаимодействуют только

друг с другом, игнорируя влияние других видов. - Модель не учитывает факторы, такие как миграция, болезни и изменение среды обитания, которые могут существенно влиять на динамику популяций.

10. Расширения модели

Существуют различные расширения модели Лотки-Вольтерры, которые учитывают дополнительные факторы, такие как: - Влияние конкуренции между жертвами. - Влияние других хищников. - Эффекты среды, такие как доступность пищи и укрытий.

Заключение

Модель Лотки-Вольтерры является важным инструментом для понимания динамики взаимодействия между хищниками и жертвами. Она позволяет исследовать, как изменения в одной популяции могут влиять на другую, и предоставляет основу для более сложных моделей, учитывающих дополнительные факторы.

Подробный анализ модели Лотки-Вольтерры

11. Численные методы решения

Для решения системы дифференциальных уравнений, описывающих модель Лотки-Вольтерры, часто используются численные методы. Один из наиболее распространенных методов — метод Рунге-Кутты, который позволяет получить приближенные решения с высокой точностью.

11.1. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4) является одним из самых популярных численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Он использует несколько промежуточных шагов для вычисления следующего значения функции, что позволяет достичь высокой точности.

Формула метода Рунге-Кутты 4-го порядка выглядит следующим образом:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

где: - (h) — шаг интегрирования, - $(k_1 = f(t_n, y_n))$, - $(k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1))$, - $(k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2))$, - $(k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3))$.

11.2. Пример реализации метода Рунге-Кутты

В предыдущем коде на Python уже был реализован метод Рунге-Кутты для решения системы уравнений Лотки-Вольтерры. Давайте рассмотрим его более подробно.

```
def runge_kutta(f, z0, t):
    z = np.zeros((len(t), len(z0)))
    z[0] = z0
    for i in range(1, len(t)):
        h = t[i] - t[i - 1]
        k1 = f(t[i - 1], z[i - 1])
        k2 = f(t[i - 1] + h / 2, z[i - 1] + h / 2 * k1)
        k3 = f(t[i - 1] + h / 2, z[i - 1] + h / 2 * k2)
        k4 = f(t[i - 1] + h, z[i - 1] + h * k3)
        z[i] = z[i - 1] + h / 6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
    return z
```

12. Графическое представление

Графики, построенные с использованием библиотеки Matplotlib, позволяют визуализировать динамику популяций жертв и хищников. Это помогает лучше понять, как взаимодействие между двумя видами влияет на их численность.

12.1. Построение графиков

В предыдущем коде мы использовали Matplotlib для построения графиков. Давайте рассмотрим, как это делается:

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
```

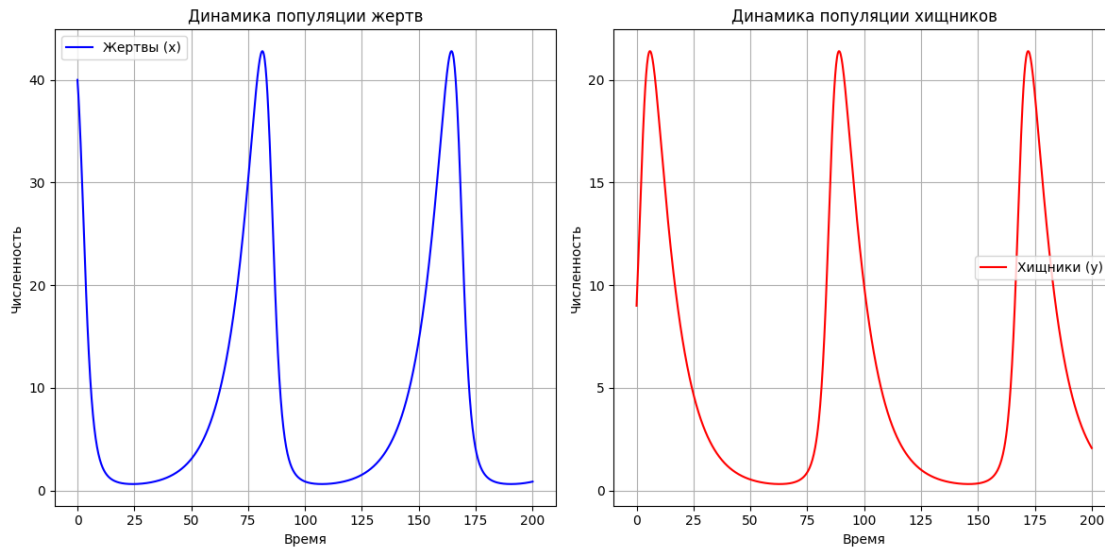
```
# График численности жертв
```

```
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(t, solution[:, 0], label='Жертвы (x)', color='blue')
plt.title('Динамика популяции жертв')
plt.xlabel('Время')
plt.ylabel('Численность')
plt.grid()
plt.legend()
```

```
# График численности хищников
```

```
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(t, solution[:, 1], label='Хищники (y)', color='red')
plt.title('Динамика популяции хищников')
plt.xlabel('Время')
plt.ylabel('Численность')
plt.grid()
plt.legend()
```

```
plt.tight_layout()
plt.show()
```



png

13. Интерпретация результатов

Графики показывают, как численность жертв и хищников колеблется со временем. Обычно наблюдается циклическое поведение: когда популяция жертв увеличивается, популяция хищников также начинает расти, так как у них больше пищи. Однако, когда популяция хищников становится слишком большой, жертвы начинают уменьшаться, что, в свою очередь, приводит к снижению численности хищников.

14. Применение в реальной жизни

Модель Лотки-Вольтерры и ее расширения находят применение в различных областях, включая: - **Экологические исследования**: для оценки устойчивости экосистем и влияния изменений среды на популяции. - **Сельское хозяйство**: для управления популяциями вредителей и их естественных врагов. - **Экономика**: для моделирования конкуренции между компаниями или видами на рынке.

15. Заключение

Модель Лотки-Вольтерры является серьёзным инструментом для анализа динамики взаимодействия между хищниками и жертвами. Она позволяет исследовать сложные экосистемные процессы и предоставляет основу для дальнейших исследований в области экологии и биологии.

Приложение

Таблица №1

| № | Матрицы | № | Матрицы |
|-----------|---|-----------|--|
| 1 | $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & -3 \\ 10 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -24 \\ 34 \\ -6 \end{bmatrix}$ | 2 | $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 & =2 \\ 10 & 3 & -4 & 2 \\ 7 & -5 & 8 & -10 \\ 4 & 5 & -8 & 10 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$ |
| 3 | $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ -8 \end{bmatrix}$ | 4 | $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \\ -8 \end{bmatrix}$ |
| 5 | $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & 14 & 20 & 25 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$ | 6 | $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \\ 6 & -3 & 7 & 8 \\ 8 & -4 & 8 & 10 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -24 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$ |
| 7 | $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -21 \\ 32 \\ -12 \end{bmatrix}$ | 8 | $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & =3 & 7 & 17 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$ |
| 9 | $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 & 11 \\ -2 & 4 & 3 & 52 \\ -3 & -8 & 11 & 12 \\ 15 & 7 & 8 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ | 10 | $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 & -15 \\ 6 & 1 & 10 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ -4 & 5 & -1 & 9 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$ |
| 11 | $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 9 & 11 \\ -5 & 6 & 5 & 3 \\ -4 & -7 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \\ -15 \end{bmatrix}$ | 12 | $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -11 \\ 2 & -6 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & 2 & 20 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ 11 \\ -9 \end{bmatrix}$ |
| 13 | $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 2 & 17 \\ 12 & 25 & 1 & 5 \\ 5 & 8 & 9 & 7 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -22 \\ 36 \\ -8 \end{bmatrix}$ | 14 | $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 & -19 \\ 5 & 8 & 12 & 3 \\ -4 & 6 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ -16 \\ 24 \end{bmatrix}$ |
| 15 | $A = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 22 & -7 \\ 16 & 25 & 9 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 22 & -9 & -7 & 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -17 \\ 26 \\ 9 \end{bmatrix}$ | 16 | $A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 16 & 8 \\ -4 & 6 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 18 & -12 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 32 \\ 48 \end{bmatrix}$ |
| 17 | $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 16 \\ 11 & 16 & 3 & 1 \\ 25 & 15 & -38 & 7 \\ -8 & 9 & -16 & -42 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 23 \\ -6 \end{bmatrix}$ | 18 | $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$ |

| № | Матрицы | № | Матрицы |
|----|---|----|---|
| 19 | $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 42 \\ 34 \end{bmatrix}$ | 20 | $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ |
| 21 | $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \\ 37 \end{bmatrix}$ | 22 | $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 25 \\ -9 \end{bmatrix}$ |
| 23 | $A = \begin{bmatrix} 12 & 14 & -15 & 24 \\ 16 & 18 & -22 & 29 \\ 18 & 20 & -21 & 32 \\ 10 & 12 & -16 & 20 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$ | 24 | $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 18 \\ 12 \end{bmatrix}$ |
| 25 | $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$ | 26 | $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$ |

Таблица №2

| № | a_5 | a_4 | a_3 | a_2 | a_1 | a_0 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Вид полинома - $P(x) = a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ | | | | | | |
| 1 | 4 | -2.6 | 5.4 | 23.6 | 116.2 | 124 |
| 2 | 2 | 4.3 | 6.4 | 68.2 | 43.1 | 235 |
| 3 | 6 | 7.8 | 2.56 | 25.4 | 82.6 | 45 |
| 4 | 3 | 2.2 | 5.6 | 48.6 | 93.3 | 158 |
| 5 | 9 | 0.8 | 12.5 | 75.8 | 128.7 | 321 |
| 6 | 1.4 | 5.5 | 2.78 | 21.2 | 75.2 | 572 |
| 7 | 11.2 | 7.2 | 3.45 | 13.8 | 87.9 | 45 |
| 9 | 6.9 | 1.8 | 4.5 | 25.5 | 93.5 | 269 |
| 10 | 4.2 | 2.3 | 5.98 | 33.4 | 21.8 | 458 |
| 11 | 2.5 | 9.4 | 9.85 | 14.2 | 89.6 | 325 |
| 12 | 7.8 | 4.5 | 1.23 | 62.1 | 94.3 | 612 |
| 13 | 5.3 | 6.2 | 4.42 | 13.3 | 135.2 | 789 |
| 14 | 2.1 | 2.8 | 5.32 | 15.5 | 152.7 | 884 |
| 15 | 0.5 | 1.6 | 1.85 | 13.4 | 167.8 | 758 |
| 16 | 0.8 | 1.3 | 7.34 | 52.8 | 71.2 | 285 |
| 17 | 1.4 | 8.7 | 8.25 | 37.2 | 89.1 | 746 |
| 18 | 1 | 2.4 | 5.65 | 28.1 | 113.3 | 742 |
| 19 | 1.7 | 3.1 | 8.25 | 41.9 | 72.4 | 854 |
| 20 | 3.6 | 5.2 | 7.55 | 19.3 | 86.8 | 482 |
| 21 | 5.2 | 6.1 | 4.74 | 35.5 | 95.7 | 564 |
| 22 | 11.8 | 9.7 | 3.56 | 28.2 | 111.5 | 764 |

| | | | | Таблица №3 | | | |
|----|--------------|-------|-------|------------|--------------|-------|-------|
| № | Коэффициенты | | | № | Коэффициенты | | |
| | a_2 | a_1 | a_0 | | a_2 | a_1 | a_0 |
| 1 | 2 | 4 | 12 | 2 | 12 | 14 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 24 | 4 | 24 | 12 | 3 |
| 5 | 4 | 7 | 22 | 6 | 22 | 6 | 4 |
| 7 | 5 | 2 | 10 | 8 | 10 | 2 | 5 |
| 9 | 6 | 9 | 2 | 10 | 2 | 8 | 6 |
| 11 | 7 | 6 | 45 | 12 | 45 | 5 | 7 |
| 13 | 8 | 7 | 24 | 14 | 24 | 6 | 8 |
| 15 | 2 | 11 | 8 | 16 | 8 | 11 | 2 |
| 17 | 3 | 3 | 12 | 18 | 12 | 26 | 3 |
| 19 | 4 | 5 | 16 | 20 | 16 | 15 | 4 |
| 21 | 5 | 8 | 18 | 22 | 18 | 18 | 5 |
| 23 | 6 | 6 | 2 | 24 | 2 | 4 | 6 |
| 25 | 7 | 12 | 4 | 26 | 4 | 5 | 7 |

Таблица №4

| № | Подынтегральная функция $f(x)$ | Интервал интегрирования | Точность вычисления |
|---|--|-------------------------|---------------------|
| 1 | $\frac{\ln x}{x} \sqrt{1 + \ln x}$ | $[1; 3.5]$ | 0.001 |
| 2 | $tg^2 x + ctg^2 x$ | $[\pi/6; \pi/3]$ | 0.002 |
| 3 | $\frac{1}{x \cdot \ln x}$ | $[1.5; 4.5]$ | 0.0001 |
| 4 | $x \cdot \exp(x) \cdot \sin x$ | $[1; 5]$ | 0.003 |
| 5 | $x \cdot \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ | $[0.0; 5.0]$ | 0.002 |
| 6 | $\frac{1}{\sqrt{9 + x^3}}$ | $[2.0; 8.0]$ | 0.001 |
| 7 | $x^4 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ | $[1.0; 3.5]$ | 0.001 |
| 8 | $x^3 \cdot \arctg(x)$ | $[0.0; \sqrt{3}]$ | 0.0005 |

| № | Подынтегральная функция $f(x)$ | Интервал интегрирования | Точность вычисления |
|----|--|-------------------------|---------------------|
| 9 | $\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$ | $[0.0; 5.5]$ | 0.0025 |
| 10 | $\frac{(1+\ln x)}{\sqrt{1+8x-6x^2}}$ | $[1; 3.5]$ | 0.001 |
| 11 | $\frac{\sqrt{x^2-0.25}}{x}$ | $[1.5; 3.5]$ | 0.0015 |
| 12 | $x^2 \cdot (1+\ln x)$ | $[2.5; 7.5]$ | 0.002 |
| 13 | $\frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+\ln x}}$ | $[0.0; \pi/3]$ | 0.0005 |
| 14 | $\frac{\sqrt{x^2-2 \cdot x+1}}{x}$ | $[1.0; 4.5]$ | 0.00025 |
| 15 | $2^{5x} \cdot \ln \cos x $ | $[0.0; \pi/2]$ | 0.0005 |
| 16 | $\frac{\exp(3x)+1}{\exp(x)+1}$ | $[0.0; 7.5]$ | 0.001 |
| 17 | $x \cdot \frac{\arctg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ | $[0.0; 2.5]$ | 0.0015 |
| 18 | $\frac{\sin^5 x}{\ln(1+x^2)}$ | $[0.0; \pi/4]$ | 0.0005 |
| 19 | $x^2 \sqrt{4-x^2}^2$ | $[1.5; 3.5]$ | 0.002 |
| 20 | $\exp(x) \cdot \cos^2 x$ | $[0.0; \pi]$ | 0.0025 |
| 21 | $\frac{1.5x^2+x}{x^3+2}$ | $[0.0; 3.0]$ | 0.001 |
| 22 | $\frac{\sin x - x^3}{x^2+2.7}$ | $[2.0; 5.5]$ | 0.0015 |
| 23 | $\frac{3.5 \cdot \operatorname{tg}(x)+x}{x^3+3.7}$ | $[0.0; 3.5]$ | 0.0005 |
| 24 | $\frac{1.2-3.2 \cdot x^2}{1+\sin^2 x}$ | $[2.0; 4.5]$ | 0.0015 |
| 25 | $\frac{3.25x+4.5}{\cos^2 x}$ | $[1.0; 6.5]$ | 0.001 |

Таблица № 5

| № | $f(x)$ | a | b | c |
|----|----------------------------------|----|------|-----|
| 1 | $x \cdot (x-1)$ | 2 | 0 | 0 |
| 2 | $x^3 + x^2 - x$ | 4 | 1 | 0 |
| 3 | $x^2 \cdot (1-x)$ | 1 | 0 | 0 |
| 4 | $1 - x^4$ | 8 | 0 | 1 |
| 5 | $1 - x^3$ | 5 | -0.3 | 0 |
| 6 | $x \cdot \sin \pi x$ | 3 | 0 | 0 |
| 7 | $(x-1) \cdot \sin^2 x$ | 9 | 0.5 | 0 |
| 8 | $(x-1) \cdot \cos^2 x$ | 5 | 0 | 0.5 |
| 9 | $2x^2 \cdot (x-1)$ | 3 | 1.5 | 0.5 |
| 10 | $4x^2 \cdot (x^2-1)$ | 7 | 0 | 0 |
| 11 | $10x^3 \cdot (x-1)$ | 2 | 0 | 0 |
| 12 | $(x^2-0.5) \cdot \cos 2\pi x$ | 12 | 0 | 0.7 |
| 13 | $\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x)$ | 5 | -1 | 0 |
| 14 | $\ln(0.5+x) \cdot (x-1)$ | 6 | 1 | 0 |
| 15 | $x \cdot \sin(4(x-1)) - x$ | 8 | -0.4 | 0 |
| 16 | $x \cdot \cos(2\pi x)$ | 9 | 1.2 | 0 |
| 17 | $x \cdot \exp(-x) \cdot (x^4-2)$ | 1 | 0 | 0.5 |
| 18 | $(x^2-0.5) \cdot \sin 2\pi x$ | 4 | 0 | 0.8 |
| 19 | $\ln(0.5+x^2) \cdot (x-1)$ | 2 | 0 | 0 |
| 20 | $x \cdot \sin^2 \pi x$ | 8 | 2 | 0.7 |
| 21 | $x^2 \cdot \sin(4(x-1))$ | 5 | 3 | 1.2 |
| 22 | $5x^4 \cdot (x-1)$ | 3 | -2 | 1.5 |
| 23 | $(x^2-1) \cdot \sin^2 x$ | 8 | -4 | 2.5 |
| 24 | $\sin(2\pi x) \cdot \cos(\pi x)$ | 6 | -1.5 | 2 |
| 25 | $(x-1) \cdot \sin^2 x$ | 2 | 0 | 5 |

Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Начальное условие $u(x,0) = f(x)$ при $0 \leq x \leq 1$

Граничные условия: $u(0,t) = c$; $u(1,t) = b$

Таблица № 6

| № | | данные | | | | | | |
|----|---|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| 1 | X | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | Y | -0,71 | -0,01 | 0,51 | 0,82 | 0,88 | 0,51 | 0,49 |
| 2 | X | -6,6 | -5,38 | -3,25 | -1,76 | 2,21 | 3,6 | 4,5 |
| | Y | 2,89 | 1,41 | 0,29 | -0,41 | -0,69 | -0,7 | 1,2 |
| 3 | X | 8,8 | 6,4 | 5,2 | 7,2 | 8,2 | 7,8 | 6,4 |
| | Y | 120,3 | 144,5 | 145,6 | 177,6 | 55,3 | 88,9 | 77,9 |
| 4 | X | 110 | 80 | 77 | 67 | 56 | 56 | 55 |
| | Y | 17,1 | 16,4 | 15,1 | 14 | 14,5 | 13,9 | 16,2 |
| 5 | X | 6,6 | 4,6 | 5,5 | 5,2 | 5,7 | 6,8 | 7,1 |
| | Y | 65,5 | 77,5 | 90,7 | 80 | 77,6 | 56,8 | 67,5 |
| 6 | X | 77 | 67 | 69 | 70 | 45 | 67 | 66 |
| | Y | 11,2 | 15 | 16 | 13 | 14,4 | 10,2 | 17,7 |
| 7 | X | 6,1 | 5,1 | 16,5 | 16,4 | 15,4 | 15,8 | 14,8 |
| | Y | 60,2 | 56,5 | 55,5 | 45,8 | 110,3 | 114,5 | 120,4 |
| 8 | X | 46 | 89 | 55 | 110 | 122 | 132 | 100 |
| | Y | 14,1 | 11,2 | 11 | 10,2 | 22 | 21 | 20 |
| 9 | X | 14,8 | 17,7 | 16,4 | 15,9 | 17,2 | 18,1 | 16,3 |
| | Y | 88 | 77,5 | 80,3 | 90,3 | 66,5 | 88,2 | 55,5 |
| 10 | X | 99 | 89 | 101 | 144 | 122 | 132 | 114 |
| | Y | 22 | 23,3 | 21,1 | 22,3 | 20 | 19,9 | 18,9 |
| 11 | X | 18,2 | 13,5 | 11,6 | 15,1 | 14,7 | 13,7 | 15,5 |
| | Y | 60 | 88,5 | 89,4 | 45,8 | 100 | 82,2 | 75,6 |
| 12 | X | 122 | 143 | 180 | 155 | 140 | 110 | 125 |
| | Y | 19,2 | 20 | 25 | 27 | 24,4 | 28,7 | 22,1 |
| 13 | X | 19,2 | 20 | 25 | 27 | 24,4 | 28,7 | 22,1 |
| | Y | 5,2 | 5,2 | 5,9 | 4,8 | 6,8 | 6,2 | 10,9 |
| 14 | X | 78 | 34 | 20 | 21 | 17 | 25 | 22 |
| | Y | 4 | 1,7 | 1,1 | 1 | 1,1 | 1,5 | 2,3 |
| 15 | X | 65,7 | 69 | 73 | 75 | 73 | 68,7 | 61 |
| | Y | 2,628 | 1,173 | 0,803 | 0,75 | 0,803 | 1,0305 | 1,403 |
| 16 | X | 41,1 | 49 | 51 | 52 | 48 | 46,2 | 41 |
| | Y | 1,644 | 0,833 | 0,561 | 0,52 | 0,528 | 0,693 | 0,943 |
| 17 | X | 6,2 | 5,8 | 5,4 | 7 | 8,1 | 6,7 | 6,9 |
| | Y | 65 | 68 | 30 | 55 | 36 | 36 | 29 |
| 18 | X | 4 | 3,9 | 1,6 | 3,8 | 2,9 | 2,4 | 2 |
| | Y | 77 | 77 | 84 | 74 | 82 | 77 | 80 |
| 19 | X | 3,08 | 3,003 | 1,344 | 2,812 | 2,378 | 1,848 | 1,6 |
| | Y | 57 | 58 | 56 | 56 | 61 | 53 | 57 |
| 20 | X | 2,28 | 2,262 | 0,896 | 2,128 | 1,769 | 1,272 | 1,14 |
| | Y | 5,5 | 5,3 | 6,4 | 9 | 7,7 | 10 | 11,2 |

| | | | | | | | | |
|----|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 21 | X | 77 | 35 | 24 | 32 | 19 | 16 | 52 |
| | Y | 4,2 | 1,8 | 1,5 | 2,8 | 1,4 | 1,6 | 5,8 |
| 22 | X | 80 | 68 | 80 | 75 | 85 | 64,5 | 72 |
| | Y | 3,36 | 1,224 | 1,2 | 2,1 | 1,19 | 1,032 | 4,176 |
| 23 | X | 64 | 44 | 63 | 56 | 64 | 50 | 58 |
| | Y | 2,688 | 0,792 | 0,945 | 1,568 | 0,896 | 0,8 | 3,364 |
| 24 | X | 12,8 | 8 | 11 | 2 | 8 | 8,3 | 6,1 |
| | Y | 27 | 20 | 45 | 71 | 21 | 37 | 20 |
| 25 | X | 3,4 | 1,6 | 4,9 | 1,4 | 1,7 | 3 | 1,2 |
| | Y | 70 | 67 | 62 | 64 | 83 | 63 | 73 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Абакумов А. И. Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций. Владивосток, 1993.
2. Абакумов А. И. Математическая экология. Владивосток, 1994.
3. Динамическая теория биологических популяций. Под ред. Р. А. Полуэктова. М., 1974.
4. Моисеев Н. Н., Александров В. В., Тарко А. М. Человек и биосфера. Опыт системного анализа и эксперименты с моделями. М., 1985.
5. Уильямсон М. Анализ биологических популяций. М., 1975.
6. Д. Гурский, Е. Турбина. Вычисления в Mathcad 12. – СПб. – 2006, 536.
7. Федоров В.Д., Гыльманов ТТ. Экология. М.: Высшая школа, 1980. 564 с.
8. Джефферс Дж. Введение в системный анализ: применение в экологии. М.: Мир, 1981. 256 с.
9. Смит Дж. М. Модели в экологии. М.: Мир, 1976. 184 с.
10. Бигон М., Харнер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. М.: Мир. 1989.
11. Волкова В.Н., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. СПб.: Изд-во С.-Петербург, гос. технол. ун-та, 1997.
12. Джшлер П. Структура сообществ и экологическая ниша. М.: Мир, 1988. 184 с.
13. Ляпунов А.А. Биогеоценозы и их математическое моделирование //Природа, 1971. № 10.
14. Марглез Р. Облик биосферы. М: Наука, 1992.
15. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
16. Математические модели в экологии и генетике. М.: Наука, 1981.
17. П.Медоуз Д.Х., Медоуз и др. Пределы роста. М.: МГУ, 1991.
18. Медоуз Д.Х. и др. За пределами роста. М.: Издательская группа «Прогресс», «Пангея», 1994. 304 с.
19. Меншуткин В.В. Математическое моделирование популяций и сообществ водных животных. Л.: Наука, 1971. 196 с.
20. Михайловский Г.Е. Жизнь и ее организация в пелагиали Мирового океана. М: Наука, 1992.
21. Моделирование морских экосистем. Л.: Гидрометеиздат, 1978.
22. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М: Наука, 1981.
23. Недорезов Л.В. Курс лекций по математической экологии. Новосибирск. Изд-во Сибирский хронограф, 1997. 161 с.
24. Петросян Л.А., Захаров В.В. Введение в математическую экологию. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 224 с.
25. Пианка Э. Эволюционная экология. М: Мир, 1981. 400 с.
26. Проблемы анализа биологических систем. Под ред. В.Н. Максимова. М.: Изд-во МГУ, 1983. 132с.

26. Пэнгл Р. Методы системного анализа окружающей среды. М.: Мир, 1979.
27. Розенберг Г. С. Модели в фитоценологии. М.: Наука, 1984.
28. Рубин А.Б. Термодинамика биологических процессов. М.: Изд-во МГУ, 1984.
29. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука. 1987.
30. Свирежев Ю.М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М: Наука, 1978.
31. Системные исследования. М.: Наука, 1970. 208 с.
32. Страшкраба М, Гнаук А. Пресноводные экосистемы. Математическое моделирование. М: Мир, 1989.
33. Уильямс О.Н. Анализ биологических популяций М: Мир, 1975. 271 с.
34. Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Избранные математические модели дивергентной эволюции популяций. М.: Наука, 1977.
35. Фролов Ю.П. Введение в математическое моделирование биологических процессов: В 2 ч. Самара: Изд. Самар. ун-та. 1994. Ч. 2: Организмы и популяции.
36. Чистохвалов В.Н. Охрана окружающей среды: прогнозирование и методы принятия решений, М.: изд. РУДН, 1992.
37. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука. М; Мир. 1978.
38. Максимей И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – М. Радио и связь, 1992. 392с.
39. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М. 1976. 286с.
40. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. MATLAB 7. М.: NT Press, 2006, 451 с.
41. Дьяконов В. MATLAB 6. СПб: Питер, 2001, 592 с.
42. Дьяконов В. и др. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. СПб: Питер, 2002, 448 с.
43. Дьяконов В. и др. MATLAB. Математические пакеты расширения. СПб: Питер, 2001, 480 с.
44. Гуляев А.. Визуальное моделирование в среде MATLAB СПб: Питер, 2000, 432 с.
45. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. МАТЛАБ 7. СПб БХВ Петербург, 2005, с.1104.